то целесообразно вычислить деффиринциал этой функции, тогда искомыми частными производными будут коэффициенты при соответствующих дифференциалах.

Так, в рассмотреном примере $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; беря коэффициенты при dx и dy из найденного нами выражения для дифференциала, получим

$$\frac{dz}{dz} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{dz}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Замечание 1. Всякую функцию $y = f(x_1, \dots x_n)$ *от n переменных можно расматривать в определенном смысле и как функцию от любого числа* $n{+}m{>}n$ *переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}$. Именно, для всякой функции $f(x_1, \dots x_n)$, заданной на множестве $E \subset E^n$, определим функцию $f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ на множество точек $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$, таких, что $(x_1, \dots x_n)E, -\infty < x_j < +\infty, j = n+1, \dots, n+m$ следующим образом:

$$f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{1}$$

Таким образом, рассмотрение функции n переменных, как функции $n+m$ переменных, означает фактически продолжение по формуле (1) функции f с множества ее определения $E \subset E^n$ на множество $E^* = \{(x_1, \dots, x_{n+m}) : (x_1, \dots x_n) \in E, -\infty < x_j < +\infty, j = n+1, \dots, n+m\}$, лежащее уже в пространстве E^{n+m}. Для функции f^*, полученной после такого продолжения, имеем

$$\frac{df^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{dx_i} = \frac{df(x_1, \dots, x_n)}{dx_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{df^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{dx_j} = 0, j = n+1, \dots, n+m,$$

поэтому

$$df^*(x_1, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{df^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{dx_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(x_1, \dots, x_n)}{dx_i} dx = df(x_1, \dots, x_n).$$

Например, когда мы говорим, что функцию одного переменного $z = f(x)$, определенную на некотором интервале (a, b), мы рассматриваем как функцию двух переменных $f(x) = F(x, y), x \in (a, b), -\infty < y < +\infty$, это означает, что функция $F(x, y)$ является постоянной, равной $f(x)$ на любой прямой, проходящей через точку x интервала (a, b) оси Ox параллельно оси Oy. При этом

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = f'(x), \frac{dF(x, y)}{dy} = 0, dF(xy) = df(x),$$

$$a < x < b, -\infty < y < +\infty.$$

Полезно для дальнейшего отметить в известном смысле обратный факт. Пусть $E \subset E^n$. Если функция $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ определена на множестве

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots x_n) \in E, a < x_{x+1} < b\}$$

и

$$\frac{df^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{dx_{n+1}} = 0 \text{ на } E^* \tag{2}$$

то существует функция $f(x_1, \ldots, x_n$ от n переменных, определенная на множестве E, и такая, что

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_i, \ldots, x_n)$$

для всех

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E, x_{n+1} \in (a, b).$$

В этом случае говорят, что *функция f^* фактически не зависит от переменной x_{n+1}*. В самом деле, из условия (20.38) следует, что функция f^* постоянна как функция x_{n+1} (см. лемму п. 11.2) при фиксированной точке $(x_1, \ldots, x_n)$, т.е., зафиксировав какое-либо $c \in (a, b)$ для любой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ и $x_{n+1} \in (a, b)$ имеем

$$f^*(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n, c).$$

Искомая функция f, очевидно, определяется равенством

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$$

причем она не зависит от выбора $c \in (a, b)$.

Из вышесказанного, в частности, следует, что формулы 1-3 для дифференциалов остаются справедливыми и в том случае, когда числа переменных , от которых зависят функции u и υ , - различны, так как всегда в силу указанного приема этот случай можно свести к вышеразобранному случаю одного исла переменных.

20.5 Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала.

Для большей геометрической наглядности, и для того, чтобы не вводить понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на плоском открытом множестве G, лежащем на плоскости E^2. Пусть $(x_0, y_0) \in G$ и пусть в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{dz}{dx}$. Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной производной $\frac{dz}{dx}$ как обычной производной функции $f(x, y)$ по x при фиксированном y и из геометрического смысла обычной производной (см. п. 9.3). В самом деле, возьмем замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G [1] . Пусть y - кривая, заданная представлением

$$z = f(x, x_0)$$

$$y = y_0$$

$$x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,$$

т.е. кривая, которая получается сечением графика функции $z = f(x, y), (x,y_) \in Q$ с плоксостью $y = y_0$(рис. 74).

[1]Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества существует такая δ-окрестность O точки (x_0, y_0), что $O \in G$. Тогда замкнутый круг Q радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке (x_0, y_0) будет заведомо лежать в G.