Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx.Это делается,например, для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную:

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C.$$

Здесь в обоих случаях подынтегрпальная функция равна $x^2 z$, но ее неопределенные интегралы в первом и втором случаях различны,так как в первом случае она рассматривается как функция от переменной x, а во втором - как функция от z.

Другие принципиально более важные удобства, вытекающие из использования записи $\int f(x)dx$, будут указаны в дальнейшем(см.замену переменной в интеграле в п.19.4).

Если F - какая-либо первообразная функция f на промежутке Δ,то согласно формуле(19.4) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \tag{1}$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записать в любом из указанных видов, т.е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{2}$$

19.2 Основные свойства интеграла. Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некотором фиксированном промежутке Δ.Перечислим свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

1°.*Если функция F дифференцируема на промежутке Δ, то $\int dF(x) = F(x) + C$, или, что то же самое,*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

2°.*Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для всех $x \in \Delta$ имеет равенство*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{3}$$

Отметим, что в этом равенстве под интегралом $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная F функции f. Поэтому (**??**) можно записать в виде равенства $dF(x)dx = f(x)dx$,справедливость которого следует из того, что F-первообразная f(т.е. из (19.1)).

3°.*Если функция* f_1 *и* f_2*имеют первообразные на промежутке* Δ*,то и функция* f_1+f_2 *имеет первообразную на этом промежутке, причем*

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{4}$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций.В правой его части стоит арифметическая сумма множеств(ее определение см.в п.4.3).Оно означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции f_1+f_2 и что, наоборот, всякая первообразная для функции f_1+f_2 является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2.

▷ Пусть F_1 и F_2 - первообразные соотвественно функций f_1 и f_2, т.е. в каждой точке $x \in \Delta$ выполняются равенства $F_1'(x) = f_1(x)$,$F_2'(x) = f_2(x)$.Тогда неопределнные интегралы $\int f_1(x)dx$ и $\int f_2(x)dx$ состоят соответственно из функций вида $F_1(x) + C_1$ и $F_2(x) + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.Положим $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, тогда функция F будет первообразной для функции f_1+f_2, ибо $F'(x) = F_1'+F_2'()x = f_1 + f_2$,$x \in \Delta$.

Следовательно, интеграл $\int(f_1(x)+f_2(x))dx$ состоит из функций $F(x)+C = F_1(x) + F_2(x) + C$, в то время как сумма интегралов $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$-из функций вида $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$.Поскольку C, C_1, C_2-произвольные постоянные, то оба эти множества,т.е. левая и правая части равенства (**??**), совпадают.◁

4°.*Если функция* f *имеет первообразную на промежутке* Δ *и* k *- число,то функция* kf *также имеет на* Δ *неврообразную и при* $k \neq 0$ *справедливо равенство*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \tag{5}$$

Это равенство так же, как равенство (**??**), является равенством множеств.

▷ Пусть F - первообразная функция f,т.е $F'(x) = f(x), x \in \Delta$.Тогда функция kF является первообразной функции kf на промежутке Δ при любом $k \in R$,ибо $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$,$x \in \Delta$.Поэтому интеграл $\int kf(x)dx$ состоит из всевозможных функций вида $kF + C$,а интеграл $k(x)dx$- из всевозможных функций $k(F + C) = kF + kC$.В силу произвольности постоянной C и условия $k \neq 0$ обе совокупности функций совпадают.Это и означает справедливость равенства (**??**).◁

Следствие(линейность интеграла).*Если функции* f_1 *и* f_2 *имеют первообразные на промежутке* Δ*, а* $\lambda_1 \in R$ *и* $\lambda_2 \in R$ *- такие числа, что*

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$,*то функция* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *также имеет первообразую на* Δ, *причем*

$$\int (\lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_2))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Это непосредственно следует из свойств 3° и 4°.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (п. 25.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления интегралов для элементарных функций.

19.3 Табличные интегралы. Из всякой формулы для производной некоторой функции

$$F'(x) = f(x) \tag{6}$$

следует формула для неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{7}$$

Иначе говоря,чтобы проверить формулу (**??**) для конкретных функций, надо проверить для них справедливость равенства (**??**) во всех точках рассматриваемого промежутка.Таким способом можно доказать справедливость следующих пятнадцати формул, называемых *табличными интералами.*

1.$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
2.$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3.$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, , \int e^x dx = e^x + C.$
4.$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5.$\int \cos x dx = \sin x + C.$
6.$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7.$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8.$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
9.$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
10.$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
11.$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
12.$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

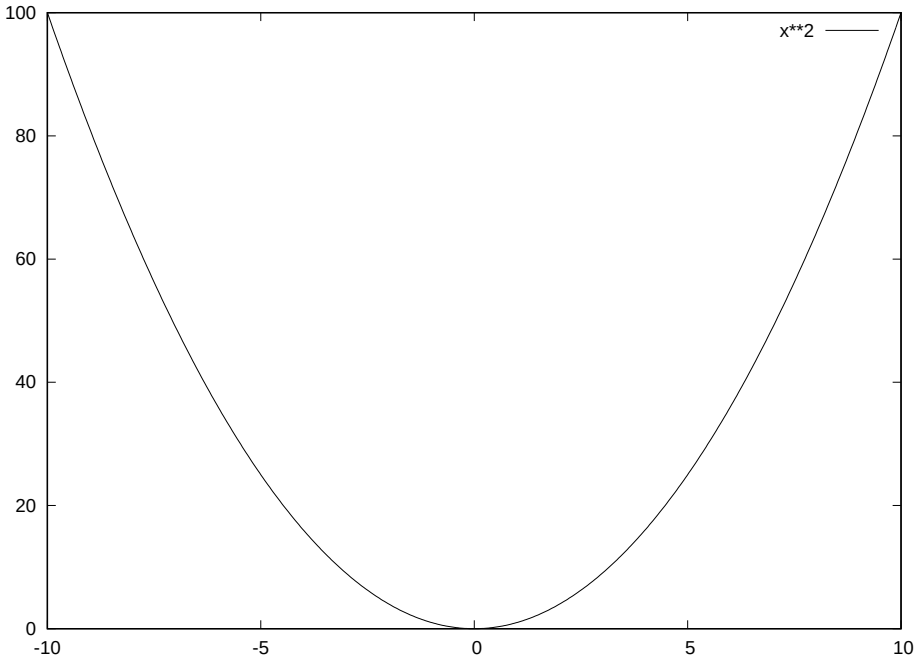

Рис. 1: Парабола.