

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f , а ее произведение на дифференциал dx . Это делается, например, для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную:

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C.$$

Здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна $x^2 z$, но ее неопределенные интегралы в первом и втором случаях различны, так как в первом случае она рассматривается как функция от переменной x , а во втором - как функция от z .

Другие принципиально более важные удобства, вытекающие из использования записи $\int f(x)dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменной в интеграле в п.19.4).

Если F - какая-либо первообразная функция f на промежутке Δ , то согласно формуле (19.4) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F :

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \quad (1)$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записать в любом из указанных видов, т.е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \quad (2)$$

19.2 Основные свойства интеграла. Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некотором фиксированном промежутке Δ . Перечислим свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

1°. Если функция F дифференцируема на промежутке Δ , то $\int dF(x) = F(x) + C$, или, что то же самое,

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

2°. Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ ; тогда для всех $x \in \Delta$ имеет место равенство

$$d \int f(x)dx = f(x)dx. \quad (3)$$

Отметим, что в этом равенстве под интегралом $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная F функции f . Поэтому (??) можно записать в виде равенства $dF(x)dx = f(x)dx$, справедливость которого следует из того, что F -первообразная f (т.е. из (19.1)).

3°. Если функция f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке Δ , то и функция $f_1 + f_2$ имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \quad (4)$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций. В правой его части стоит арифметическая сумма множеств (ее определение см. в п. 4.3). Оно означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции $f_1 + f_2$ и что, наоборот, всякая первообразная для функции $f_1 + f_2$ является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2 .

▷ Пусть F_1 и F_2 - первообразные соответственно функций f_1 и f_2 , т.е. в каждой точке $x \in \Delta$ выполняются равенства $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда неопределенные интегралы $\int f_1(x)dx$ и $\int f_2(x)dx$ состоят соответственно из функций вида $F_1(x) + C_1$ и $F_2(x) + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Положим $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, тогда функция F будет первообразной для функции $f_1 + f_2$, ибо $F'(x) = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$, $x \in \Delta$.

Следовательно, интеграл $\int (f_1(x) + f_2(x))dx$ состоит из функций $F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$, в то время как сумма интегралов $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ - из функций вида $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Поскольку C, C_1, C_2 - произвольные постоянные, то оба эти множества, т.е. левая и правая части равенства (??), совпадают. ◁

4°. Если функция f имеет первообразную на промежутке Δ и k - число, то функция kf также имеет на Δ первообразную и при $k \neq 0$ справедливо равенство

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx. \quad (5)$$

Это равенство так же, как равенство (??), является равенством множеств.

▷ Пусть F - первообразная функция f , т.е. $F'(x) = f(x)$, $x \in \Delta$. Тогда функция kF является первообразной функции kf на промежутке Δ при любом $k \in R$, ибо $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$, $x \in \Delta$. Поэтому интеграл $\int kf(x)dx$ состоит из всевозможных функций вида $kF + C$, а интеграл $\int k(x)dx$ - из всевозможных функций $k(F + C) = kF + kC$. В силу произвольности постоянной C и условия $k \neq 0$ обе совокупности функций совпадают. Это и означает справедливость равенства (??). ◁

Следствие (линейность интеграла). Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке Δ , а $\lambda_1 \in R$ и $\lambda_2 \in R$ - такие числа, что

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ также имеет первообразную на Δ , причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_2)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx.$$

Это непосредственно следует из свойств 3° и 4°.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (п. 25.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления интегралов для элементарных функций.

19.3 Табличные интегралы. Из всякой формулы для производной некоторой функции

$$F'(x) = f(x) \quad (6)$$

следует формула для неопределенного интеграла

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (7)$$

Иначе говоря, чтобы проверить формулу (??) для конкретных функций, надо проверить для них справедливость равенства (??) во всех точках рассматриваемого промежутка. Таким способом можно доказать справедливость следующих пятнадцати формул, называемых *табличными интегралами*.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$$

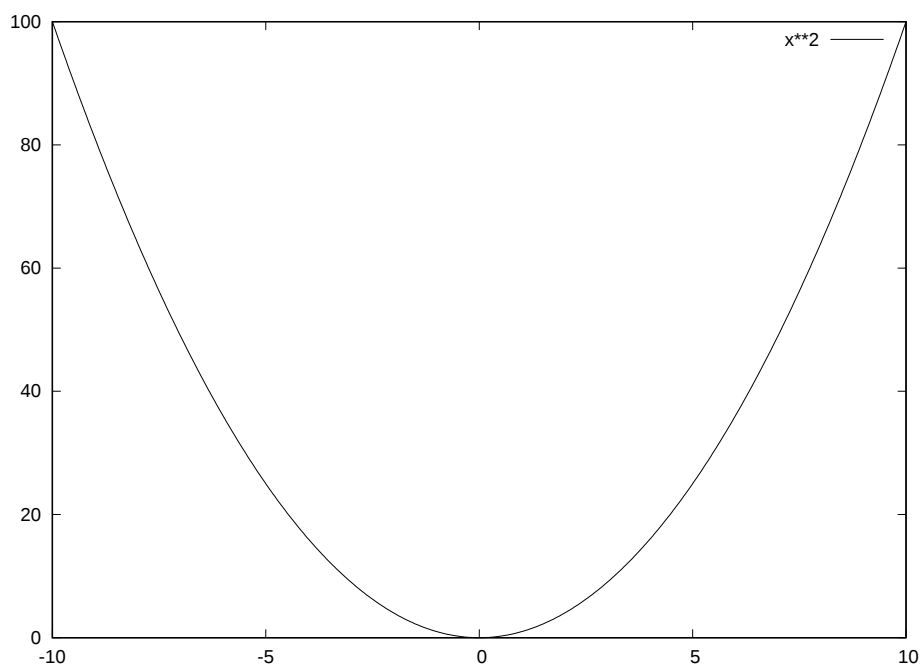


Рис. 1: Парабола.