

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию  $f$ , а ее произведение на дифференциал  $dx$ . Это делается, например, для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную:

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C.$$

Здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна  $x^2 z$ , но ее неопределенные интегралы в первом и втором случаях различны, так как в первом случае она рассматривается как функция от переменной  $x$ , а во втором - как функция от  $z$ .

Другие принципиально более важные удобства, вытекающие из использования записи  $\int f(x)dx$ , будут указаны в дальнейшем (см. замену переменной в интеграле в п.19.4).

Если  $F$  - какая-либо первообразная функция  $f$  на промежутке  $\Delta$ , то согласно формуле (19.4) под знаком интеграла стоит дифференциал функции  $F$ :

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \quad (1)$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записать в любом из указанных видов, т.е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \quad (2)$$

**19.2 Основные свойства интеграла.** Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некотором фиксированном промежутке  $\Delta$ . Перечислим свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

1°. Если функция  $F$  дифференцируема на промежутке  $\Delta$ , то  $\int dF(x) = F(x) + C$ , или, что то же самое,

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

2°. Пусть функция  $f$  имеет первообразную на промежутке  $\Delta$ ; тогда для всех  $x \in \Delta$  имеет место равенство

$$d \int f(x)dx = f(x)dx. \quad (3)$$

Отметим, что в этом равенстве под интегралом  $\int f(x)dx$  понимается произвольная первообразная  $F$  функции  $f$ . Поэтому (??) можно записать в виде равенства  $dF(x)dx = f(x)dx$ , справедливость которого следует из того, что  $F$ -первообразная  $f$  (т.е. из (19.1)).

3°. Если функция  $f_1$  и  $f_2$  имеют первообразные на промежутке  $\Delta$ , то и функция  $f_1 + f_2$  имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \quad (4)$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций. В правой его части стоит арифметическая сумма множеств (ее определение см. в п. 4.3). Оно означает, что сумма каких-либо первообразных для функций  $f_1$  и  $f_2$  является первообразной для функции  $f_1 + f_2$  и что, наоборот, всякая первообразная для функции  $f_1 + f_2$  является суммой некоторых первообразных для функций  $f_1$  и  $f_2$ .

▷ Пусть  $F_1$  и  $F_2$  - первообразные соответственно функций  $f_1$  и  $f_2$ , т.е. в каждой точке  $x \in \Delta$  выполняются равенства  $F_1'(x) = f_1(x)$ ,  $F_2'(x) = f_2(x)$ . Тогда неопределенные интегралы  $\int f_1(x)dx$  и  $\int f_2(x)dx$  состоят соответственно из функций вида  $F_1(x) + C_1$  и  $F_2(x) + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные. Положим  $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ , тогда функция  $F$  будет первообразной для функции  $f_1 + f_2$ , ибо  $F'(x) = F_1' + F_2'(x) = f_1 + f_2, x \in \Delta$ .

Следовательно, интеграл  $\int (f_1(x) + f_2(x))dx$  состоит из функций  $F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$ , в то время как сумма интегралов  $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$  - из функций вида  $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$ . Поскольку  $C, C_1, C_2$  - произвольные постоянные, то оба эти множества, т.е. левая и правая части равенства (??), совпадают. ◁

4°. Если функция  $f$  имеет первообразную на промежутке  $\Delta$  и  $k$  - число, то функция  $kf$  также имеет на  $\Delta$  первообразную и при  $k \neq 0$  справедливо равенство

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx. \quad (5)$$

Это равенство так же, как равенство (??), является равенством множеств.

▷ Пусть  $F$  - первообразная функция  $f$ , т.е.  $F'(x) = f(x), x \in \Delta$ . Тогда функция  $kF$  является первообразной функции  $kf$  на промежутке  $\Delta$  при любом  $k \in R$ , ибо  $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x), x \in \Delta$ . Поэтому интеграл  $\int kf(x)dx$  состоит из всевозможных функций вида  $kF + C$ , а интеграл  $\int k(x)dx$  - из всевозможных функций  $k(F + C) = kF + kC$ . В силу произвольности постоянной  $C$  и условия  $k \neq 0$  обе совокупности функций совпадают. Это и означает справедливость равенства (??). ◁

Следствие (линейность интеграла). Если функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют первообразные на промежутке  $\Delta$ , а  $\lambda_1 \in R$  и  $\lambda_2 \in R$  - такие числа, что

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ , то функция  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  также имеет первообразную на  $\Delta$ , причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_2)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx.$$

Это непосредственно следует из свойств 3° и 4°.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (п. 25.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления интегралов для элементарных функций.

**19.3 Табличные интегралы.** Из всякой формулы для производной некоторой функции

$$F'(x) = f(x) \quad (6)$$

следует формула для неопределенного интеграла

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (7)$$

Иначе говоря, чтобы проверить формулу (??) для конкретных функций, надо проверить для них справедливость равенства (??) во всех точках рассматриваемого промежутка. Таким способом можно доказать справедливость следующих пятнадцати формул, называемых *табличными интегралами*.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$$