1 Свойства функции $H_{n,k}(q)$

Рассмотрим следующую функцию:

$$H_{n,k}(q) = \frac{q^k(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}}, \quad k \in Z, n \in Z.$$

По доказанному, данная функция имеет следующее разложение в окрестности точки $q = 1$:

$$H_{n,k}(q)_{q=1} = -n(q-1) - \frac{n}{2}(2k + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 + o(q^2);$$

Учитывая, что $p_a = H_{n,0}(q)$, докажем следующие свойства:

1. $(q^i - q^j)p_a = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2), \quad i \in Z, j \in Z.$
   Доказательство: Учитывая, что при $k \in Z$:
   $$q^k p_a = q^k H_{n,0}(q) = \frac{q^k(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}} = H_{n,k}(q),$$
   получим:
   $$(q^i - q^j)p_a = H_{n,i} - H_{n,j} =$$
   $$-n(q-1) - \frac{n}{2}(2i + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 +$$
   $$+n(q-1) + \frac{n}{2}(2j + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 + o(q^2) =$$
   $$= n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2).$$
   Что и требовалось доказать.

2. $\sum\limits_k (q^{i_k} - q^{j_k})p_a = n(\sum\limits_k (j_k - i_k))(q-1)^2 + o(q^2), \quad k \in N, i_k \in Z, j_k \in Z.$
   Доказательство:
   $$\sum_k (q^{i_k} - q^{j_k})p_a = \sum_k (n(j_k - i_k)(q-1)^2 + o(q^2)) =$$
   $$= n(\sum_k (j_k - i_k))(q-1)^2 + o(q^2).$$

3. $q^k(q^i - q^j)p_a = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2), \quad k \in Z, i \in Z, j \in Z.$
   Доказательство:
   $$q^k(q^i - q^j)p_a = n(j + k - (i + k))(q-1)^2 + o(q^2)) = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2).$$

4. $(q^k - q^l)(q^i - q^j)p_a = o(q^2), \quad k \in Z, l \in Z, i \in Z, j \in Z.$
   Доказательство:
   $$(q^k - q^l)(q^i - q^j)p_a = q^k(q^i - q^j)p_a - q^l(q^i - q^j)p_a =$$
   $$= n(j-i)(q-1)^2 - n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2) = o(q^2).$$

2 Теорема о произвольном максимальном размере окна

Обозначим за p вероятность потери пакета, $q = (1-p)$. Положим максимальный размер окна в пакетах $w_{max} = n, a = \lfloor n/2 \rfloor$, тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_k = q^{k-1}p_{k-1} + (1-q^{2k})p_{2k} + (1-q^{2k+1})p_{2k+1}, & 2 < k < a \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1} + (1-q^{2k})p_{2k}, & k = a \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1}, & a < k < n, \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1} + q^k p_k, & k = n, \\ \sum\limits_{i=2}^{n} p_i = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим $b = \lfloor a/2 \rfloor$. Тогда решения системы, выраженные через p_a, имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} p_k = \left(\dfrac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=k}^{a-1} q^i} + \sum\limits_{i=k+1}^{a-1} \dfrac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=k}^{i-1} q^j} \right) p_a, & b \le k < a, \\ p_k = F_{k-1}p_a, & a < k < n, \\ p_k = \dfrac{F_{k-1}}{1-q^k} p_a, & k = n. \end{array} \tag{2}$$

где $F_i = \prod\limits_{k=a}^{i} q^i$. Приближенные значения вероятностей для $b \le k < n$ имеют вид:

$$\begin{array}{rcll} p_k & = & \dfrac{n}{2}(2k+1+a)(2k+2-a)p^2 + o(p^2), & b \le k < a, \\ p_k & = & -np - \dfrac{n}{2}((k-a)(k+a-1)+ & \\ & & +(n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2), & a \le k < n, \\ p_n & = & 1 - \sum\limits_{i=2}^{n-1} p_i. & \end{array} \tag{3}$$

При $2 \le k < b$ вероятности имеют сложное представление в общем виде, поэтому будем сразу искать их приближенное значение.

Лемма 1 *Пусть максимальный размер окна в пакетах $w_{max} = n, n \ge 2$. Тогда для $k < a, a = \lfloor n/2 \rfloor$ решения системы* (1) *будут иметь следующий вид:*

$$p_k = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a, \quad s \in N, i_s \in Z, j_s \in Z.$$

Доказательство:

1. Докажем утверждение для случая $k = a - 1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из (1):

$$p_a = q^{a-1}p_{a-1} + (1-q^n)p_n.$$

   Из (2) следует, что:

$$(1-q^n)p_n = F_{n-1}p_a.$$

Таким образом,

$$p_{a-1} = q^{1-a}p_a - q^{1-a}F_{n-1}p_a = (q^i - q^j)p_a.$$

Замечание: При нечетном n соответствующее уравнение из (1) будет иметь следущий вид:

$$p_a = q^{a-1}p_{a-1} + (1-q^{n-1})p_{n-1} + (1-q^n)p_n,$$

но так как:

$$(1-q^{n-1})p_{n-1} = (1-q^{n-1})F_{n-2}p_a = (q^l - q^m)p_a$$

то при нечетном n:

$$p_{a-1} = \sum_{l=1}^{2}(q^{i_l} - q^{j_l})p_a.$$

Таким образом, утверждение верно для $k = a-1$ и произвольного n.

2. Предположим, что утвержение верно для всех $k \geq l, 2 < l < a$.

3. Докажем, что утверждение верно для $k = l-1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из (1):

$$p_l = q^{l-1}p_{l-1} + (1-q^{2l})p_{2l} + (1-q^{2l+1})p_{2l+1}.$$

Отсюда:

$$p_{l-1} = q^{1-l}p_l + q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} + q^{1-l}(q^{2l+1}-1)p_{2l+1}.$$

По предположению,

$$q^{1-l}p_l = \sum_m (q^{i_m} - q^{j_m})p_a$$

Рассмотрим p_{2l}. Возможны два случая:

(a) $2l \geq a$. Тогда из (2) следует, что $p_{2l} = F_{2l-1}p_a$, и

$$q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} = (q^{i_2} - q^{j_2})p_a.$$

(b) $2l < a$. Тогда по предположению,

$$p_{2l} = \sum_m q^{i_m} - q^{j_m}p_a$$

Отсюда следует, что

$$q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} = q^{1-l}(q^{2l}-1)\sum_m (q^{i_m} - q^{j_m})p_a =$$

$$= \sum_m q^{1-l}(q^{2l}-1)(q^{i_m}-q^{j_m})p_a = \sum_m (q^{1-l}q^{2l}(q^{i_m}-q^{j_m}) + q^{1-l}(q^{j_m}-q^{i_m}))p_a =$$

$$= \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Рассуждая аналогично для p_{2l+1}, получим, что p_{l-1} можно выразить в виде:

$$p_{l-1} = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s}) p_a.$$

Лемма доказана.

Теорема *Пусть максимальный размер окна в пакетах* $w_{max} = n, n \geq 2, a = \lfloor n/2 \rfloor$. *Тогда для* $k < b, b = \lfloor a/2 \rfloor$ *приближенные решения системы* (1) *будут иметь следующий вид:*

$$p_k = o(q^2).$$

Доказательство:

1. Рассмотрим случай $k = b - 1$, b - четное, т.е. $b = a/2$. Тогда:

$$p_b = q^{b-1} p_{b-1} + (1 - q^a) p_a + (1 - q^{a+1}) p_{a+1} =$$

$$= q^{b-1} p_{b-1} + p_a - q^{a+1} p_{a+1} = q^{b-1} p_{b-1} + (1 - q^{2a+1}) p_a.$$

Отсюда получим:

$$p_{b-1} = q^{1-b} p_b + q^{1-b} (q^{2a+1} - 1) p_a.$$

Из Леммы 1 следует, что p_b можно представить в виде

$$p_b = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s}) p_a.$$

Тогда, по свойству 3 функции $H_{n,k}(q)$, получим, что p_b и $q^{1-b} p_b$ равны с точностью до $o(q^2)$ в окрестности точки $q = 1$, т.е., с учетом (3), имеем:

$$q^{1-b} p_b = \frac{n}{2} (2b+1+a)(2b+2-a)(q-1)^2 + o(q^2) = n(2a+1)(q-1)^2 + o(q^2).$$

По свойству 3 функции $H_{n,k}(q)$ получим:

$$q^{1-b} (q^{2a+1} - 1) p_a = -n(2a+1)(q-1)^2 + o(q^2).$$

Таким образом,

$$p_{b-1} = n(2a+1)(q-1)^2 - n(2a+1)(q-1)^2 + o(q^2) = o(q^2).$$

2. Предположим, что утвержение верно для всех $k \geq l, 2 < l < b$.

3. Докажем, что утверждение верно для $k = l - 1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из (1):

$$p_l = q^(l-1) p_{l-1} + (1 - q^{2l}) p_{2l} + (1 - q^{2l+1}) p_{2l+1}.$$

Отсюда:

$$p_{l-1} = q^{1-l} p_l + q^{1-l} (q^{2l} - 1) p_{2l} + q^{1-l} (q^{2l+1} - 1) p_{2l+1}.$$

Из Леммы 1 следует, что p_l можно представить в виде:

$$p_l = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s}) p_a.$$

Таким образом, p_l и $q^{1-l} p_l$ равны с точностью до $o(q^2)$ в окрестности точки $q = 1$ и, с учетом предположения, имеем:

$$q^{1-l} p_l = o(q^2).$$

Рассмотрим выражение $q^{1-l}(q^{2l} - 1) p_{2l}$. Из Леммы 1 следует, что:

$$p_{2l} = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s}) p_a.$$

Тогда, по свойству 4 функции $H_{n.k}(q)$ получим, что

$$q^{1-l}(q^{2l} - 1) p_{2l} = \sum_s (q^{l+1} - q^{1-l})(q^{i_s} - q^{j_s}) p_a = o(q^2).$$

Рассуждая аналогично для p_{2l+1}, получим:

$$p_{l-1} = o(q^2).$$

Теорема доказана.

Окончательно, для произвольного $n > 2$, $a = \lfloor n/2 \rfloor$, $b = \lfloor a/2 \rfloor$, получим:

$$\begin{array}{lcll}
p_k & = & o(p^2), & 2 \leq k < b, \\
p_k & = & \dfrac{n}{2}(2k + 1 + a)(2k + 2 - a)p^2 + o(p^2), & b \leq k < a, \\
p_k & = & -np - \dfrac{n}{2}((k - a)(k + a - 1) + & \\
 & & +(n - a)(n - a + 1) + n - 1)p^2 + o(p^2), & a \leq k < n, \\
p_n & = & 1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} p_i. &
\end{array} \qquad (4)$$