Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Петрозаводский государственный университет
Математический факультет
Кафедра информатики
и математического обеспечения

Сало Андрей Юрьевич

Использование методов анализа марковских процессов для исследования производительности транспортного протокола Internet

510210 — Программное обеспечение вычислительных сетей

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
к.т.н., доцент
Богоявленская О. Ю.

Петрозаводск — 2006

Оглавление

Введение **3**

1 Марковская модель алгоритма предотвращения насыщения **5**

1.1 Основные предположения 5

1.2 Марковская модель алгоритма предотвращения насыщения 5

1.3 Уравнения Колмогорова 6

2 Аналитические аппроксимации основных характеристик алгоритма предотвращения насыщения **10**

2.1 Аналитические оценки вероятностей для размера окна меньше 14 10

2.2 Свойства функции $H_{n,k}(q)$ 12

2.3 Теорема о произвольном максимальном размере окна 14

2.4 Оценка ожидаемого размера окна 18

3 Численные примеры **22**

Заключение **25**

Список литературы **26**

Введение

В настоящее время подавляющее большинство приложений, обменивающихся данными в сети Internet, использует на транспортном уровне протокол TCP (Transmission Control Protocol). Таким образом, производительность TCP обладает огромным влиянием на производительность Internet в целом. Многочисленные попытки расширения семейства Internet приложений выявили недостатки традиционного остаточного принципа (best effort), по которому действует транспортный протокол TCP. Требования современных приложений, передающие данные реального времени, такие как, например, аудио- и видеоданные, противоречат остаточному принципу. Для таких приложений наиболее критичным является время задержки передачи данных. Потери данных менее важны по сравнению с большими задержками, в то время как TCP обеспечивает максимальную надежность с помощью повторных передач. Таким образом, адаптация транспортного протокола, построенного по остаточному принципу, к требованиям приложений реального времени является актуальной проблемой. Исследования, относящиеся к данной проблеме, описаны, например, в [1], [2], [7]. Одним из наиболее известных вариантов решения этой проблемы стал набор стандартов QoS (Quality of Service), в котором была определена структура классификации, обслуживания и формирования потоков данных. Тем не менее, несмотря на все попытки, TCP по прежнему продолжает доминировать в Internet и контролировать большинство потоков, пакетов и байтов.

Одной из важнейших причин повсеместного использования TCP в качестве протокола транспортного уровня является его механизм предотвращения насыщения (congestion avoidance). В сети постоянно возникают ситуации, когда суммарный объем данных, которые необходимо передать или получить, превышает пропускную способность. Складывается впечатление, что перегрузку создает сам TCP, т.к. протокол TCP действует по остаточному принципу. Таким образом, возникает перегрузка сети, характеризующаяся тем, что в сети происходят постоянные повторные передачи уже отправленных сегментов, вызванные истечением времени ожидания подтверждения, т.е. фактически никакая полезная информация не передается. Механизм предотвращения насыщения обеспечивает стабильность сети и предотвращает перегрузки, ведущие к полному прекращению передачи полезной информации. В действительности, в настоящее время TCP является единственным средством, обеспечивающим контроль загрузки и производительности в Internet. Таким образом, любой новый протокол транспортного уровня (или другое средство) должно сохранить механизм борьбы с перегрузками TCP.

Тесная связь между производительностью TCP и механизмом борьбы с перегрузками является причиной значительных усилий, которые были затрачены на разработку модели для аналитического представления пропускной способности TCP. В большинстве этих исследований получена приближенная оценка средней пропускной способности TCP. Одной из наиболее часто упоминаемых оценок средней пропускной способности TCP является известная формула S. Floyd [6]:

$$B(p) = \frac{1}{RTT}\sqrt{\frac{3}{2bp}} + o(1/\sqrt{p}). \tag{1}$$

Однако, данная формула обладает некоторыми серьезными недостатками:

- размер окна стремится к бесконечности при стремлении вероятности потери пакета к нулю;
- RTT рассматривается как детерминированная величина;
- не учитываются ограничения на максимальный размер окна, определяемый в процессе установки TCP соединения;
- свойства этой оценки (в т.ч. точность) неизвестны.

В нашей работе мы представляем один из альтернативных подходов к моделированию пропускной способности алгоритма борьбы с перегрузками TCP, который часто определяется как алгоритм Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD). Наша модель может также рассматриваться как модель реализации TCP NewReno с вероятностью потери пакета меньше 2.5%. В модели не учитываются кратковременные TCP соединения.

В процессе исследования были получены следующие результаты:

- были решены уравнения Колмогорова для полумарковского процесса, характеризующего поведение реализации TCP NewReno, описанных в [3], [4];
- было получено аналитическое представление стационарного распределения окна для модели производительности AIMD;
- были получены приближенные решения второго порядка для вероятностей и оценки ожидаемого размера окна (т.к. точное решение имеет довольно сложный вид);
- полученная оценка стремится к максимальному размеру окна, определяемому в процессе установки TCP соединения, при стремлении вероятности потери сегмента к нулю;
- в полученной оценке учитывается изменчивость RTT.

Данная работа является попыткой использования принципиально нового подхода к оценке математического ожидания размеров скользящего окна. Первая глава посвящена описанию марковской модели алгоритма предотвращения насыщения в протоколе TCP. Для полученной модели строятся уравнения Колмогорова, а также приводятся решения системы в явном виде. Во второй главе проводится более глубокий анализ системы, строятся аппроксимации решений для произвольного максимального размера окна, а также выводится оценка математического ожидания размера скользящего окна для общего случая. В третьей главе проводится анализ полученных результатов и сравнение полученной оценки с уже существующими.

Глава 1

Марковская модель алгоритма предотвращения насыщения

1.1 Основные предположения

Сформулируем предположения для нашей модели.

- Мы будем рассматривать только механизм AIMD (Additive Increase Multiple Decrease), который используется в протоколе TCP для предотвращения насыщения. Суть этого механизма состоит в следующем: в случае, если для всех переданных сегментов пришли подтверждения (т.е. сегменты были успешно получены), размер скользящего окна передачи данных увеличивается на 1. Если была выявлена потеря пакета, то размер окна передачи данных уменьшается вдвое. Алгоритм повторной передачи не рассматривается.

- Модель потери сегментов должна обладать свойством отсутствия памяти. Это означает, что вероятность того, что n сегментов будут успешно переданы получателю, не зависит от того, сколько сегментов было успешно передано до момента последней потери.

  Таким свойстом обладает, например, схема Бернулли. Обозначим вероятность потери сегмента за p. Тогда вероятность доставить пакет успешно будет равна $(1-p), 0 < p < 1$. Данная вероятность не зависит от того, были ли доставлены предыдущие пакеты.

- Мы не будем рассматривать причины, по которым произошла потеря сегмента. Потеря может быть вызвана как перегрузкой сети, так и проблемами со связью.

- Максимальный размер окна передачи данных ограничен некоторым постоянным значением. Это значение может быть определено в процессе установки TCP-соединения.

1.2 Марковская модель алгоритма предотвращения насыщения

Пусть $w(t)$ будет размером скользящего окна w в момент времени $t > 0$, и τ_i будет последовательностью моментов времени, в которые размер окна w изменяется под воздействием алгоритма AIMD. Тогда последовательность $w_i = w(\tau_i), i = 1, 2, \ldots,$ будет являться, согласно нашим предположениям, Марковской цепью. Областью значений цепи будет являться множество $X = 2, 3, \ldots, w_{max}$, т.к. минимально возможный размер окна, определяемый алгоритмом AIMD, равен 2. Ступенчатый случайный процесс $w(t)_{t>0}$ является полумарковским. Обозначим за p_{uv}^k вероятность перехода цепи w_i из состояния u в состояние v за k шагов, $u, v \in X$. Согласно нашим предположениям, p_{uv}^k. Обозначим $P_w(t) = w(t) = w$ и $\alpha_w = E[\tau_{i+i} - \tau_i | w(\tau_i) = w]$. График процесса изображен на рисунке 1.1.

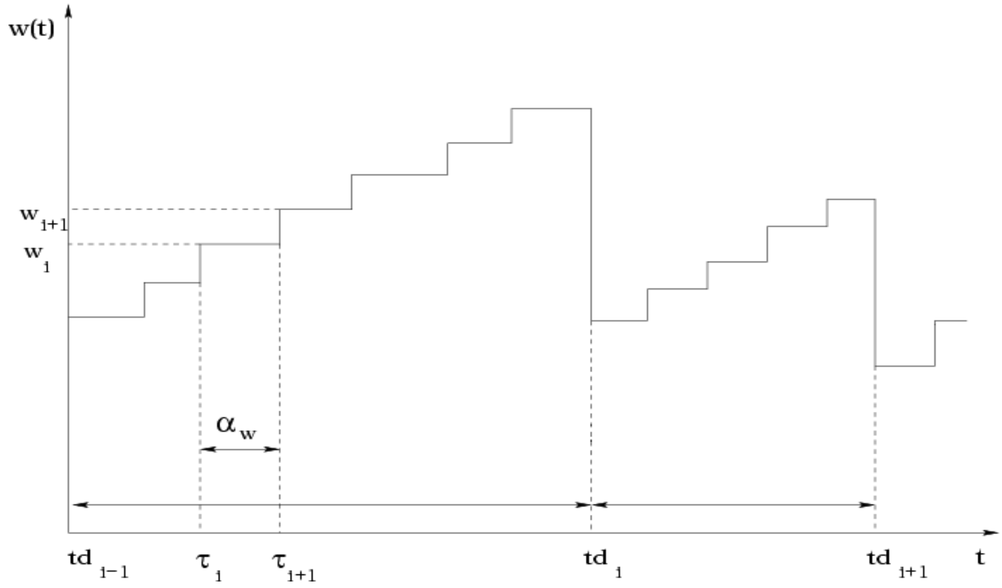

Рис. 1.1: Ступенчатый случайный процесс изменения размера скользящего окна.

1.3 Уравнения Колмогорова

Согласно нашим предположениям, последовательность значений размера скользящего окна w формирует марковскую цепь. Переходные вероятности определяются моделью потери сегментов. Обозначим за g^i вероятность того, что более i сегментов были успешно переданы, а за g_i вероятность того, что было успешно передано менее i сегментов (т.е. некоторые сегменты из этого числа были утеряны). Упрощенный фрагмент диаграммы переходов марковской цепи приведен на рисунке 1.2.

Построим на основе данной интерпретации систему уравнений Колмогорова, соответствующую процессу. Обозначим за p вероятность потери пакета, $q = (1 - p)$. Положим максимальный размер окна в пакетах $w_{max} = n, a = \lfloor n/2 \rfloor$, тогда получим следующую систему

$$\begin{array}{ccccc} & & 2w & & \\ & & \downarrow g_{2w} & & \\ w-1 & \xrightarrow{g^{w-1}} & w & \xrightarrow{g^{w}} & w+1 \\ & & \downarrow g_{w} & & \\ & & w/2 & & \end{array}$$

Рис. 1.2: Фрагмент диаграммы переходов.

уравнений:

$$\begin{cases} p_k = q^{k-1}p_{k-1} + (1-q^{2k})p_{2k} + (1-q^{2k+1})p_{2k+1}, & 2 < k < a \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1} + (1-q^{2k})p_{2k}, & k = a \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1}, & a < k < n, \\ p_k = q^{k-1}p_{k-1} + q^k p_k, & k = n, \\ \sum\limits_{i=2}^{n} p_i = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для того, чтобы найти решения данной системы, докажем следующее утверждение.

Утверждение *Решения системы 1.1, выраженные через p_a, имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} & p_k = \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=k}^{a-1} q^i} + \sum_{i=k+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=k}^{i-1} q^j} \right) p_a, && 2 < k < a, \\ & p_k = F_{k-1} p_a, && a < k < n, \\ & p_k = \frac{F_{k-1}}{1 - q^k} p_a, && k = n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $F_i = \prod\limits_{k=a}^{i} q^i$.

Доказательство: Сначала докажем, что

$$p_k = F_{k-1} p_a, \quad a < k < n.$$

Рассмотрим уравнения

$$p_k = q^{k-1} p_{k-1}, \quad a < k < n,$$

в системе 1.1. Отсюда следует, что для любого $a < k < n$ рекурсивно выполняется

$$p_k = q^{k-1} p_{k-1} = q^{k-1} q^{k-2} p_{k-2} = \ \dots \ = q^{k-1} q^{k-2} \cdot \ \dots \ \cdot q^a p_a = F_{k-1} p_a.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$p_k = q^{k-1} p_{k-1} + q^k p_k, \quad k = n,$$

из системы 1.1. Т.к. $k - 1 < n$, то, по доказанному,

$$p_{k-1} = F_{k-2} p_a.$$

Таким образом при $k = n$

$$p_k = \frac{q^{k-1} F_{k-2}}{1 - q^k} p_a = \frac{F_{k-1}}{1 - q^k} p_a.$$

Наконец, докажем, что

$$p_k = \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=k}^{a-1} q^i} + \sum_{i=k+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=k}^{i-1} q^j} \right) p_a, \quad 2 < k < a,$$

методом математической индукции.

1. Положим $k = a - 1$. Рассмотрим уравнение

$$p_a = q^{a-1}p_{a-1} + (1 - q^{2a})p_{2a}$$

из системы 1.1. Т.к., по доказанному,

$$p_{2a} = p_n = \frac{F_{2a-1}}{1 - q^{2a}}p_a,$$

то отсюда следует, что

$$p_{a-1} = q^{-(a-1)}\left(1 - (1 - q^{2a})\frac{F_{2a-1}}{1 - q^{2a}}\right)p_a = \frac{1 - F_{2a-1}}{q^{a-1}}p_a.$$

Таким образом, утверждение верно для случая $k = a - 1$.

2. Допустим, что утверждение верно для всех $k \geq l$, $2 < l < a$.

3. Докажем утверждение для случая $k = l - 1$. Рассмотрим уравнение

$$p_l = q^{l-1}p_{l-1} + (1 - q^{2l})p_{2l} + (1 - q^{2l+1})p_{2l+1},$$

По предположению,

$$p_l = \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=l}^{a-1} q^i} + \sum_{i=l+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=l}^{i-1} q^j}\right)p_a.$$

По доказанному,

$$(1 - q^{2l})p_{2l} + (1 - q^{2l+1})p_{2l+1} = (1 - q^{2l})F_{2l-1}p_a + (1 - q^{2l+1})F_{2l}p_a =$$

$$= (F_{2l-1} - F_{2l} + F_{2l} - F_{2l+1})p_a = (F_{2l-1} - F_{2l+1})p_a$$

Отсюда

$$p_{l-1} = q^{-(l-1)}\left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=l}^{a-1} q^i} + \sum_{i=l+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=l}^{i-1} q^j} - F_{2l-1} + F_{2l+1}\right)p_a =$$

$$= \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=l-1}^{a-1} q^i} + \sum_{i=l+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=l-1}^{i-1} q^j} + \frac{F_{2l+1} - F_{2l-1}}{q^{l-1}}\right)p_a =$$

$$= \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=l-1}^{a-1} q^i} + \sum_{i=l}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=l-1}^{i-1} q^j}\right)p_a.$$

Утверждение доказано. ■

Таким образом, решения системы 1.1, выраженные через p_a, имеют вид 1.2. Значение p_a находится из последнего уравнения системы 1.1:

$$\left(f_n(q) + \frac{F_{n-1}}{1 - q^n}\right)p_a = 1, \tag{1.3}$$

где $f_n(q)$ является суммой коэффициентов при p_a в уравнениях 1.2.

Отметим, что система 1.1 верна только для случая четного n. Если n — нечетно, то уравнение для $k = a$ приобретает вид:

$$p_k = q^{k-1}p_{k-1} + (1 - q^{2k})p_{2k} + (1 - q^{2k+1})p_{2k+1}.$$

С учетом того, что при $k = a$:

$$\begin{aligned} p_{2k} &= p_{n-1} = F_{2k-1}p_a, \\ p_{2k+1} &= p_n = q^{n-1}p_{n-1} + q^n p_n, \end{aligned}$$

получим:

$$p_k = q^{k-1}p_{k-1} + p_{n-1} - q^{n-1}p_{n-1} + p_n - q^n p_n = q^{k-1}p_{k-1} + F_{2k-1}p_a.$$

Таким образом,

$$p_{k-1} = \frac{1 - F_{2k-1}}{q^{k-1}}p_k = \frac{1 - F_{2a-1}}{q^{a-1}}p_a,$$

и решения 1.2 верны также и для нечетного n.

Таким образом, нами была сформулирована марковская модель алгоритма предотвращения насыщения, построена система уравнений Колмогорова, описывающая данную модель, и получено аналитическое представление стационарного распределения модели.

Глава 2

Аналитические аппроксимации основных характеристик алгоритма предотвращения насыщения

2.1 Аналитические оценки вероятностей для размера окна меньше 14

В Главе 1 нами была сформулирована марковская модель алгоритма предотвращения насыщения. Для модели была построена соответствующая система уравнений Колмогорова 1.1. Мы решили данную систему и получили точное аналитическое решение системы, имеющее вид 1.2. Тем не менее, поиск аналитического представления ожидаемого размера скользящего окна авляется трудоемкой задачей, и, по всей вероятности, даже если удастся получить точное решения в явной форме, то результат будет малоприменим на практике. Таким образом, мы будем строить аппроксимации решений системы 1.1 и искать оценку ожидаемого размера окна.

Рассмотрим следующую функцию:

$$H_{n,k}(q) = \frac{q^k(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q)+F_{n-1}}, \quad k \in Z, n \in Z, \tag{2.1}$$

где $q = (1-p)$, p — вероятность потери пакета, $f_n(q)$ является суммой коэффициентов при p_a в уравнениях 1.2, $F_{n-1} = \prod_{k=a}^{n-1} q^i$. Разложим функцию $H_{n,k}(q)$ в ряд Тейлора до второго порядка выключительно в окрестности точки $q = 1$:

$$H_{n,k}(q) = H_{n,k}(1) + H'_{n,k}(1)(q-1) + \frac{H''_{n,k}(1)}{2}(q-1)^2 + o(q^2).$$

Очевидно, $H_{n,k}(1) = 0$. Вычислим первую производную:

$$H'_{n,k}(q) = \frac{(kq^{k-1}(1-q^n) - nq^{n-1}q^k)((1-q^n)f_n(q)+F_{n-1}) -}{((1-q^n)f_n(q)+F_{n-1})^2}$$

$$\frac{q^k(1-q^n)(f'_n(q)(1-q^n) - nq^{n-1}f_n(q) + F'_{n-1})}{} =$$

$$= \frac{-nq^{k+n-1}F_{n-1} + kq^{k-1}(1-q^n)F_{n-1} + kq^{k-1}(1-q^n)^2 f_n(q) -}{((1-q^n)f_n(q)+F_{n-1})^2}$$

$$\frac{q^k f_n'(q)(1-q^n)^2 - q^k(1-q^n)F_{n-1}'}{} =$$

$$= \frac{-nq^{k+n-1}F_{n-1} + (1-q^n)(kq^{k-1}F_{n-1} - q^kF_{n-1}') + (1-q^n)^2(kq^{k-1}f_n(q) - q^kf_n'(q))}{((1-q^n)f_n(q) + F_{n-1})^2}.$$

Очевидно, что $H_k'(q)_{q=1} = -n$.

Введем обозначение $(F_{n-1})'_{q=1} = C$. При вычислении $H''_{n,k}(q)_{q=1}$, будем учитывать, что:

1. $(-nq^{k+n-1}F_{n-1})'_{q=1} = -n(k+n-1) - nC$;
2. $((1-q^n)(kq^{k-1}F_{n-1} - q^kF_{n-1}'))'_{q=1} = -nk + nC$;
3. $((1-q^n)^2(kq^{k-1}f_n(q) - q^kf_n'(q)))'_{q=1} = 0$;

Получим:

$$H''_{n,k}(q)_{q=1} = \frac{(-n(k+n-1) - nk)((1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}) +}{((1-q^n)f_n(q) + F_{n-1})^3}$$

$$\left.\frac{2n(f_n'(q)(1-q^n) - nq^{n-1}f_n(q) + F_{n-1}')}{}\right|_{q=1} =$$

$$= (-2nk - n(n-1) + 2n(-nf_n(q) + C)_{q=1}.$$

Учитывая, что

$$f_n(q)_{q=1} = \lceil n/2 \rceil = n - a \text{ (это следует из 1.2)},$$

$$C = \sum_{i=a}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-a)(n-1+a),$$

получим окончательное значение второй производной:

$$H''_{n,k}(q)_{q=1} = -2nk - n(n-1) - 2n^2(n-a) + n(n-a)(n-1+a)) =$$

$$= -2nk - n(n-1+2n(n-a) - (n-a)(n-1+a)) =$$

$$= -2nk - n((n-a)(n-a+1) + n - 1).$$

Таким образом,

$$H_{n,k}(q)_{q=1} = -n(q-1) - \frac{n}{2}(2k + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 + o(q^2). \qquad (2.2)$$

Полученная формула является разложением функции $H_{n,k}(q)$ в ряд Тейлора до второго порядка включительно в окрестности точки $q = 1$.

Восмользуемся формулой 2.2 для вычисления аналитических оценок вероятностей 1.2. Рассмотрим уравнение 1.3. Из него следует, что

$$p_a = \frac{(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}} = H_{n,0}(q).$$

Таким образом, p_a будет иметь следующее разложение:

$$p_a = -np - \frac{n}{2}((n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2).$$

Рассмотрим $p_k, a < k < n$. Из решений 1.2 следует, что

$$p_k = F_{k-1}p_a = \prod_{i=a}^{k-1} q^i p_a = q^{\frac{1}{2}(k-a)(k+a-1)}p_a.$$

Таким образом, для $a \le k < n$ получим:

$$p_k = -np - \frac{n}{2}((k-a)(k+a-1) + (n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2).$$

Вычислим приближенные значения $p_k, 2 \le k < a$. Отметим, что из решений 1.2 следует, что при:

$$p_k = \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=k}^{a-1} q^i} + \sum_{i=k+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=k}^{i-1} q^j} \right) p_a = \sum_i (q^{A_i} - q^{B_i}) p_a =$$

$$= \sum_i (H_{n,A_i}(q) - H_{n,B_i}(q)) = -n \sum_i (A_i - B_i) p^2 + o(p^2) =$$

$$= -n \left(0 - \sum_{i=a}^{2a-1} i + \sum_{i=a}^{2a-1} i - \sum_{i=a}^{2a-3} i + \dots + \sum_{i=a}^{2k+3} i - \sum_{i=a}^{2k+1} \right) p^2 + o(p^2) =$$

$$= \left(n \sum_{i=a}^{2k+1} i \right) p^2 + o(p^2).$$

Таким образом, для $2 \le k < a$ получим:

$$p_k = n(2k + a + 1)(2k + 2 - a)p^2 + o(p^2).$$

Приближенное значение p_n можно получить из выражения:

$$p_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i.$$

Окончательно,

$$\begin{array}{rcll} p_k & = & \frac{n}{2}(2k+1+a)(2k+2-a)p^2 + o(p^2), & 2 \le k < a, \\ p_k & = & np - \frac{n}{2}((k-a)(k+a-1)+ & \\ & & +(n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2), & a \le k < n, \\ p_n & = & 1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i. & \end{array} \tag{2.3}$$

Полученные приближенные значения $p_2, \dots, p_n$ являются аналитическими оценками точных решений 1.2 системы 1.1.

Тем не менее, в случае, когда максимальный размер окна будет больше или равен 14, решения 1.2 будут иметь иной вид. Поиск решений в общем виде в данном случае является довольно сложной задачей. Оказывается, что можно избежать поиска решений системы 1.1 в явном виде и искать сразу приближенные решения. Для этого необходимо изучить некоторые свойства функции $H_{n,k}(q)$.

2.2 Свойства функции $H_{n,k}(q)$

Рассмотрим следующую функцию:

$$H_{n,k}(q) = \frac{q^k(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}}, \quad k \in Z, n \in Z.$$

По формуле 2.2, данная функция имеет следующее разложение в окрестности точки $q = 1$:

$$H_{n,k}(q)_{q=1} = -n(q-1) - \frac{n}{2}(2k + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 + o(q^2).$$

Учитывая, что $p_a = H_{n,0}(q)$, докажем следующие свойства:

Свойство 1

$$(q^i - q^j)p_a = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2), \quad i \in Z, j \in Z. \tag{2.4}$$

Доказательство: Учитывая, что при $k \in Z$:

$$q^k p_a = q^k H_{n,0}(q) = \frac{q^k(1-q^n)}{(1-q^n)f_n(q) + F_{n-1}} = H_{n,k}(q),$$

получим:

$$(q^i - q^j)p_a = H_{n,i} - H_{n,j} =$$
$$= -n(q-1) - \frac{n}{2}(2i + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 +$$
$$+n(q-1) + \frac{n}{2}(2j + (n-a)(n-a+1) + n - 1)(q-1)^2 + o(q^2) =$$
$$= n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2).$$

Что и требовалось доказать. ■

Свойство 2

$$\sum_k (q^{i_k} - q^{j_k})p_a = n(\sum_k (j_k - i_k))(q-1)^2 + o(q^2), \quad k \in N, i_k \in Z, j_k \in Z. \tag{2.5}$$

Доказательство:

$$\sum_k (q^{i_k} - q^{j_k})p_a = \sum_k (n(j_k - i_k)(q-1)^2 + o(q^2)) =$$
$$= n(\sum_k (j_k - i_k))(q-1)^2 + o(q^2). \quad \blacksquare$$

Свойство 3

$$q^k(q^i - q^j)p_a = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2), \quad k \in Z, i \in Z, j \in Z. \tag{2.6}$$

Доказательство:

$$q^k(q^i - q^j)p_a = n(j + k - (i+k))(q-1)^2 + o(q^2)) = n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2). \quad \blacksquare$$

Свойство 4

$$(q^k - q^l)(q^i - q^j)p_a = o(q^2), \quad k \in Z, l \in Z, i \in Z, j \in Z. \tag{2.7}$$

Доказательство:

$$(q^k - q^l)(q^i - q^j)p_a = q^k(q^i - q^j)p_a - q^l(q^i - q^j)p_a =$$
$$= n(j-i)(q-1)^2 - n(j-i)(q-1)^2 + o(q^2) = o(q^2). \quad \blacksquare$$

2.3 Теорема о произвольном максимальном размере окна

В Главе 1 были получены точные аналитические решения 1.2 системы уравнений Колмогорова 1.1. Заметим, что полученные решения верны только для того случая, когда максимальный размер окна будет меньше 14, как это видно из доказательства утверждения в Главе 1. В случае, когда максмальный размер окна будет больше или равен 14, полученные значения будут верны только для определенной части вероятностей.

Рассмотрим случай, когда максимальный размер окна неограничен. Обозначим $b = \lfloor a/2 \rfloor$. Используя рассуждения, аналогичные доказательству утверждения из Главы 1, можно доказать, что решения системы 1.1 для произвольного n, выраженные через p_a, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&p_k = \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{\prod_{i=k}^{a-1} q^i} + \sum_{i=k+1}^{a-1} \frac{F_{2i+1} - F_{2i-1}}{\prod_{j=k}^{i-1} q^j} \right) p_a, && b \le k < a, \\
&p_k = F_{k-1} p_a, && a < k < n, \\
&p_k = \frac{F_{k-1}}{1 - q^k} p_a, && k = n.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $F_i = \prod\limits_{k=a}^{i} q^k$. Приближенные значения вероятностей для $b \le k < n$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
p_k &= \frac{n}{2}(2k+1+a)(2k+2-a)p^2 + o(p^2), \qquad b \le k < a, \\
p_k &= np - \frac{n}{2}((k-a)(k+a-1)+ \\
&\quad +(n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2), \quad a \le k < n, \\
p_n &= 1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Проблема заключается в том, что при $2 \le k < b$ вероятности имеют сложное представление в общем виде. Поэтому будем сразу искать их приближенное значение. Для этого докажем следующую лемму и теорему о произвольном максимальном размере окна.

Лемма *Пусть максимальный размер окна в пакетах $w_{max} = n$, $n \ge 2$. Тогда для $k < a$, $a = \lfloor n/2 \rfloor$ решения системы 1.1 будут иметь следующий вид:*

$$p_k = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s}) p_a, \quad s \in N, i_s \in Z, j_s \in Z.$$

Доказательство: Будем доказывать лемму методом математической индукции:

1. Докажем утверждение для случая $k = a - 1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из 1.1:
$$p_a = q^{a-1} p_{a-1} + (1 - q^n) p_n.$$
Из 2.8 следует, что:
$$(1 - q^n) p_n = F_{n-1} p_a.$$
Таким образом,
$$p_{a-1} = q^{1-a} p_a - q^{1-a} F_{n-1} p_a = (q^i - q^j) p_a.$$

Замечание: *При нечетном n соответствующее уравнение из 1.1 будет иметь следущий вид:*

$$p_a = q^{a-1}p_{a-1} + (1-q^{n-1})p_{n-1} + (1-q^n)p_n,$$

но так как:

$$(1-q^{n-1})p_{n-1} = (1-q^{n-1})F_{n-2}p_a = (q^l - q^m)p_a$$

то при нечетном n:

$$p_{a-1} = \sum_{l=1}^{2}(q^{i_l} - q^{j_l})p_a.$$

Таким образом, утверждение верно для $k = a-1$ и произвольного n.

2. Предположим, что утвержение верно для всех $k \geq l, 2 < l < a$.

3. Докажем, что утверждение верно для $k = l-1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из 1.1:

$$p_l = q^{l-1}p_{l-1} + (1-q^{2l})p_{2l} + (1-q^{2l+1})p_{2l+1}.$$

Отсюда:

$$p_{l-1} = q^{1-l}p_l + q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} + q^{1-l}(q^{2l+1}-1)p_{2l+1}.$$

По предположению,

$$q^{1-l}p_l = \sum_m (q^{i_m} - q^{j_m})p_a$$

Рассмотрим p_{2l}. Возможны два случая:

(a) $2l \geq a$. Тогда из 2.8 следует, что $p_{2l} = F_{2l-1}p_a$, и

$$q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} = (q^{i_2} - q^{j_2})p_a.$$

(b) $2l < a$. Тогда по предположению,

$$p_{2l} = \sum_m q^{i_m} - q^{j_m}p_a$$

Отсюда следует, что

$$q^{1-l}(q^{2l}-1)p_{2l} = q^{1-l}(q^{2l}-1)\sum_m (q^{i_m} - q^{j_m})p_a =$$

$$= \sum_m q^{1-l}(q^{2l}-1)(q^{i_m} - q^{j_m})p_a = \sum_m (q^{1-l}q^{2l}(q^{i_m} - q^{j_m}) + q^{1-l}(q^{j_m} - q^{i_m}))p_a =$$

$$= \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Рассуждая аналогично для p_{2l+1}, получим, что p_{l-1} можно выразить в виде:

$$p_{l-1} = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Лемма доказана. ■

Теорема (о произвольном максимальном размере окна) *Пусть максимальный размер окна в пакетах $w_{max} = n, n \geq 2, a = \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда для $k < b, b = \lfloor a/2 \rfloor$ приближенные решения системы 1.1 будут иметь следующий вид:*

$$p_k = o(q^2).$$

Доказательство: Будем доказывать теорему методом математической индукции:

1. Рассмотрим случай $k = b - 1$, a - четное, т.е. $b = a/2$. Тогда:

$$p_b = q^{b-1}p_{b-1} + (1 - q^a)p_a + (1 - q^{a+1})p_{a+1} =$$
$$= q^{b-1}p_{b-1} + p_a - q^{a+1}p_{a+1} = q^{b-1}p_{b-1} + (1 - q^{2a+1})p_a.$$

Отсюда получим:
$$p_{b-1} = q^{1-b}p_b + q^{1-b}(q^{2a+1} - 1)p_a.$$

Из леммы следует, что p_b можно представить в виде

$$p_b = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Тогда, по Свойству 3 функции $H_{n,k}(q)$, получим, что p_b и $q^{1-b}p_b$ равны с точностью до $o(q^2)$ в окрестности точки $q = 1$, т.е., с учетом 2.9, имеем:

$$q^{1-b}p_b = \frac{n}{2}(2b + 1 + a)(2b + 2 - a)(q - 1)^2 + o(q^2) = n(2a + 1)(q - 1)^2 + o(q^2).$$

По Свойству 3 функции $H_{n,k}(q)$ получим:

$$q^{1-b}(q^{2a+1} - 1)p_a = -n(2a + 1)(q - 1)^2 + o(q^2).$$

Таким образом,

$$p_{b-1} = n(2a + 1)(q - 1)^2 - n(2a + 1)(q - 1)^2 + o(q^2) = o(q^2).$$

Замечание: *При нечетном a получим $b = (a - 1)/2$, и соответствующее уравнение из 1.1 будет иметь следущий вид:*

$$p_b = q^{b-1}p_{b-1} + (1 - q^{a-1})p_{a-1} + (1 - q^a)p_a.$$

Из 2.9 следует, что:
$$p_{a-1} = \frac{1 - F_{2a-1}}{q^{a-1}}p_a,$$

тогда
$$(1 - q^{a-1})p_{a-1} + (1 - q^a)p_a =$$
$$= (1 - q^{a-1})\frac{1 - F_{2a-1}}{q^{a-1}}p_a + p_a - q^a p_a =$$
$$= \left(\frac{1 - F_{2a-1}}{q^{a-1}} - 1 + F_{2a-1} + 1 - q^a\right)p_a =$$
$$= q^{1-a}(1 - F_{2a-1})p_a + (F_{2a-1} - q^a)p_a.$$

Таким образом,

$$p_{b-1} = q^{1-b}p_b - q^{1-b}q^{1-a}(1 - F_{2a-1})p_a - q^{1-b}(F_{2a-1} - q^a)p_a.$$

По Свойству 3 функции $H_{n,k}(q)$ и с учетом соотношения 2.9 получим:

$$q^{1-b}p_b = \frac{n}{2}(2b+1+a)(2b+2-a)(q-1)^2 + o(q^2) =$$

$$= \frac{n}{2}(2a)(q-1)^2 + o(q^2) = na(q-1)^2 + o(q^2).$$

$$q^{1-b}q^{1-a}(1 - F_{2a-1})p_a = n(\sum_{i=a}^{2a-1} i)(q-1)^2 + o(q^2).$$

$$q^{1-b}(F_{2a-1} - q^a)p_a = n(a - \sum_{i=a}^{2a-1} i)(q-1)^2 + o(q^2).$$

Таким образом, как и в случае с четным а, p_{b-1} будет иметь вид:

$$p_{b-1} = n(a - \sum_{i=a}^{2a-1} i - a + \sum_{i=a}^{2a-1} i)(q-1)^2 + o(q^2) = o(q^2).$$

2. Предположим, что утвержение верно для всех $k \geq l, 2 < l < b$.
3. Докажем, что утверждение верно для $k = l - 1$. Рассмотрим соответствующее уравнение из 1.1:

$$p_l = q^{l-1}p_{l-1} + (1 - q^{2l})p_{2l} + (1 - q^{2l+1})p_{2l+1}.$$

Отсюда:

$$p_{l-1} = q^{1-l}p_l + q^{1-l}(q^{2l} - 1)p_{2l} + q^{1-l}(q^{2l+1} - 1)p_{2l+1}.$$

Из леммы следует, что p_l можно представить в виде:

$$p_l = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Таким образом, p_l и $q^{1-l}p_l$ равны с точностью до $o(q^2)$ в окрестности точки $q = 1$ и, с учетом предположения, имеем:

$$q^{1-l}p_l = o(q^2).$$

Рассмотрим выражение $q^{1-l}(q^{2l} - 1)p_{2l}$. Так как $l < b$, то $2l < a$. Тогда из леммы следует, что:

$$p_{2l} = \sum_s (q^{i_s} - q^{j_s})p_a.$$

Тогда, по Свойству 4 функции $H_{n,k}(q)$ получим, что

$$q^{1-l}(q^{2l} - 1)p_{2l} = \sum_s (q^{l+1} - q^{1-l})(q^{i_s} - q^{j_s})p_a = o(q^2).$$

Для аппроксимации p_{2l+1} в виду того, что $2l < a$, в случае, когда $2l+1 = a$, и лемма не может быть применена. Однако это возможно только в том случае, когда a — нечетно и $l = b$, т.е. в уравнении

$$p_b = q^{b-1}p_{b-1} + (1 - q^{a-1})p_{a-1} + (1 - q^a)p_a.$$

Но для данного случая формулировка теоремы уже была доказана выше. Таким образом, рассматривая случай $2l+1 < a$ и применяя лемму и Свойство 4 функции $H_{n,k}(q)$, получим:

$$p_{l-1} = o(q^2).$$

Теорема доказана. $\blacksquare$

Окончательно, для произвольного $n > 2$, $a = \lfloor n/2 \rfloor$, $b = \lfloor a/2 \rfloor$, получим:

$$\begin{array}{lcll} p_k & = & o(p^2), & 2 \le k < b, \\ p_k & = & \dfrac{n}{2}(2k+1+a)(2k+2-a)p^2 + o(p^2), & b \le k < a, \\ p_k & = & np - \dfrac{n}{2}((k-a)(k+a-1)+ & \\ & & +(n-a)(n-a+1) + n - 1)p^2 + o(p^2), & a \le k < n, \\ p_n & = & 1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} p_i, & k = n. \end{array} \tag{2.10}$$

2.4 Оценка ожидаемого размера окна

Опираясь на полученные ранее оценки элементов распределения, рассмотрим оценку математического ожидания размера скользящего окна:

$$E(p) = \sum_{i=2}^{n} ip_i = \sum_{i=2}^{n-1} ip_i + np_n = \sum_{i=2}^{n-1} ip_i + n(1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i) =$$

$$= n - \sum_{i=2}^{n-1}(n-i)p_i.$$

Вычислим коэффициент при p в оценке $E(p)$:

$$-\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)n = -n\sum_{i=1}^{n-a} i = -\frac{n(n-a)(n-a+1)}{2}.$$

Вычислим коэффициент при p^2 в оценке $E(p)$:

1. Рассмотрим сумму коэффициентов при p_k для $b \le k < a$:

$$-\frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}(n-i)(2i+1+a)(2i+2-a) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}(n-i)(4i^2 + (1+a)2i + (2-a)2i + (1+a)(2-a)) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}(n-i)(4i^2+6i+(1+a)(2-a)) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}(4ni^2+6ni+n(1+a)(2-a)-4i^3-6i^2-(1+a)(2-a)i) =$$

$$= 2n\sum_{i=b}^{a-1}i^3 - \frac{n}{2}(4n-6)n\sum_{i=b}^{a-1}i^2 - \frac{n}{2}(6n-(1+a)(2-a))\sum_{i=b}^{a-1}i - \frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}n(1+a)(2-a) =$$

$$= 2n\sum_{i=b}^{a-1}i^3 - n(2n-3)\sum_{i=b}^{a-1}i^2 - \frac{n}{2}(6n+(a+1)(a+2))\sum_{i=b}^{a-1}i + \frac{n^2}{2}(a-b)(a+1)(a-2).$$

$$-\frac{n}{2}(6n+(a+1)(a+2))\sum_{i=b}^{a-1}i + \frac{n^2}{2}(a-b)(a+1)(a-2) =$$

$$= -\frac{n}{4}(6n+(a+1)(a+2))(a-b)(a+b-1) + \frac{n^2}{2}(a-b)(a+1)(a-2) =$$

$$= \frac{n(a-b)}{4}(-6n(a+b-1)-(a+1)(a+2)(a+b-1)+2n(a+1)(a-2)) =$$

$$= \frac{n(a-b)}{4}(-6na-6nb-6n+2n(a^2-a-2)-(a+1)(a+2)(a+b-1)) =$$

$$= \frac{n(a-b)}{4}(-6na-6nb+6n-2na^2-2na-4n-(a+1)(a+2)(a+b-1)) =$$

$$= \frac{n(a-b)}{4}(-8na-6nb+2n-2na^2-(a+1)(a+2)(a+b-1)) =$$

$$= -\frac{n(a-b)}{4}(2n(a^2+4a+3b-1)+(a+1)(a+2)(a+b-1)).$$

Таким образом,

$$-\frac{n}{2}\sum_{i=b}^{a-1}(n-i)(2i+1+a)(2i+2-a) =$$

$$= 2n\sum_{i=b}^{a-1}i^3 - n(2n-3)\sum_{i=b}^{a-1}i^2 - \frac{n(a-b)}{4}(2n(a^2+4a+3b-1)+(a+1)(a+2)(a+b-1)).$$

2. Рассмотрим сумму коэффициентов при p_k для $a \le k < n$:

$$p^2 : -\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)((i-a)(i+a-1)+(n-a)(n-a+1)+n-1) =$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)(i-a)(i+a-1) + \sum_{i=a}^{n-1}(n-i)((n-a)(n-a+1)+n-1)\right) =$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)(i^2-ai+(a-1)i-a(a-1)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=a}^{n-1}n((n-a)(n-a+1)+n-1) - \right.$$

$$-\sum_{i=a}^{n-1} i((n-a)(n-a+1)+n-1)\Bigg) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)(i^2-i-a(a-1))+$$

$$+\frac{n}{2}((n-a)(n-a+1)+n-1)\sum_{i=a}^{n-1} i-$$

$$-\frac{n^2}{2}(n-a)((n-a)(n-a+1)+n-1).$$

$$-\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)(i^2-i-a(a-1)) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(ni^2-ni-na(a-1)-in-i^3+i^2+a(a-1)i) =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(-i^3+(n+1)i^2+(a(a-1)-n)i-na(a-1)) =$$

$$= \frac{n^2}{2}\sum_{i=a}^{n-1} i^3 - \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=a}^{n-1} i^2 + \frac{n(n-a(a-1))}{2}\sum_{i=a}^{n-1} i + \frac{n^2}{2}(n-a)a(a-1).$$

$$\frac{n(n-a(a-1))}{2}\sum_{i=a}^{n-1} i + \frac{n^2}{2}(n-a)a(a-1) =$$

$$= \frac{1}{4}n(n-a(a-1))(n-a)(n+a-1) + \frac{1}{2}n^2(n-a)(a-1)a =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n(n+a-1)-a(a-1)(n+a-1)+2n(a-1)a) =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n(n+a-1)+a(a-1)(2n-n-a+1)) =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n(n+a-1)+a(a-1)(n-a+1)) =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n^2+na-n+(a^2-a)(n-a+1)) =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n^2+na-n+na^2-na-(a^2-a)(a-1)) =$$

$$= \frac{n(n-a)}{4}(n^2+(a^2-1)n-a(a-1)^2).$$

$$\frac{n}{2}((n-a)(n-a+1)+n-1)\sum_{i=a}^{n-1} i - \frac{n^2}{2}(n-a)((n-a)(n-a+1)+n-1) =$$

$$= \frac{n}{4}((n-a)(n-a+1)+n-1)(n-a)(n+a-1)-$$

$$-\frac{2n^2}{4}(n-a)((n-a)(n-a+1)+n-1)=$$

$$=\frac{n}{4}(n-a)((n-a)(n-a+1)+n-1)(n+a-1-2n)=$$

$$=-\frac{n}{4}(n-a)(n-a+1)((n-a+1)+n-1).$$

Таким образом,

$$-\frac{n}{2}\sum_{i=a}^{n-1}(n-i)((i-a)(i+a-1)+(n-a)(n-a+1)+n-1)=$$

$$=\frac{n^2}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^3-\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^2+\frac{n(n-a)}{4}(n^2+(a^2-1)n-a(a-1)^2)-$$

$$-\frac{n}{4}(n-a)(n-a+1)((n-a+1)+n-1)=$$

$$=\frac{n^2}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^3-\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^2+\frac{n(n-a)}{4}(n^2+(a^2-1)n-a(a-1)^2-$$

$$-(n-a+1)((n-a+1)+n-1)).$$

Окончательно, получим следующую оценку математического ожидания размера скользящего окна:

$$\begin{aligned}E(p) \;=\; & n-\tfrac{n(n-a)(n-a+1)}{2}p+\Big(2n\sum_{i=b}^{a-1}i^3+\tfrac{n^2}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^3-n(2n-3)\sum_{i=b}^{a-1}i^2-\tfrac{n(n+1)}{2}\sum_{i=a}^{n-1}i^2-\\ & -\tfrac{n(a-b)}{4}(2n(a^2+4a+3b-1)+(a+1)(a+2)(a+b-1))+\\ & +\tfrac{n(n-a)}{4}(n^2+(a^2-1)n-a(a-1)^2-(n-a+1)((n-a+1)+n-1))\Big)p^2+\\ & +o(p^2).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Формула 2.11 является оценкой математического ожидания размера скользящего окна, зависящей только от вероятности потери пакета p, а также учитывающей ограничения на максимальный размер окна передачи n.

Глава 3

Численные примеры

Рассмотрим полумарковский процесс, описывающий поведения реализации TCP NewReno, в конкретном случае $n = 10$ (максимальный размер окна). Тогда соответствующая процессу система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} p_3 = q^2 p_2 + (1 - q^6)p_6 + (1 - q^7)p_7, \\ p_4 = q^3 p_2 + (1 - q^8)p_8 + (1 - q^9)p_9, \\ p_5 = q^4 p_2 + (1 - q^{10})p_{10}, \\ p_6 = q^5 p_5, \\ p_7 = q^6 p_6, \\ p_8 = q^7 p_7, \\ p_9 = q^8 p_8, \\ p_{10} = q^9 p_9 + q^{10} p_{10}, \\ \sum\limits_{i=2}^{10} p_i = 1. \end{cases}$$

В соответствии с формулами, полученными в Главе 2, будут иметь место следующие приближенные решения:

$$\begin{aligned} &p_2 = 50p^2 + o(p^2); \\ &p_3 = 180p^2 + o(p^2); \\ &p_4 = 350p^2 + o(p^2); \\ &p_5 = 10p - 145p^2 + o(p^2); \\ &p_6 = 10p - 245p^2 + o(p^2); \\ &p_7 = 10p - 305p^2 + o(p^2); \\ &p_8 = 10p - 375p^2 + o(p^2); \\ &p_9 = 10p - 455p^2 + o(p^2); \\ &p_{10} = 1 - 50p + 995p^2 + o(q^2), \end{aligned}$$

Оценка математического ожидания размера скользящего окна будет иметь следующий вид:

$$E(p) = \sum_{i=2}^{10} i p_i = 10 - 150p + 235p^2 + o(p^2).$$

На рисунке 3.1 представлены графики эмпирической пропускной способности TCP (E), оценки ожидаемого размера окна, вычисленной по полученной формуле ($E(p)$), а также оценки пропускной способности, вычисленной по формуле S. Floyd [6] ($Sally - Floyd$).

На рисунке 3.2 представлены те же графики, но для общего случая (максимальный размер окна > 14). Оценка математического ожидания вычислялась по формуле 2.11.

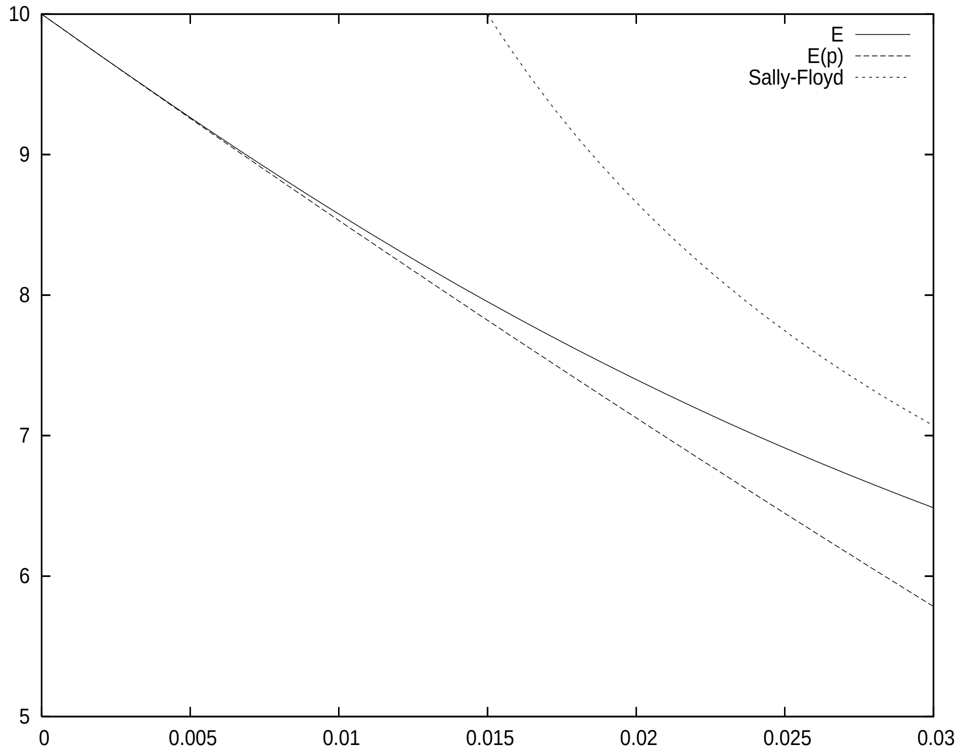

Рис. 3.1: Сравнение оценок размера окна (макс. размер окна 10).

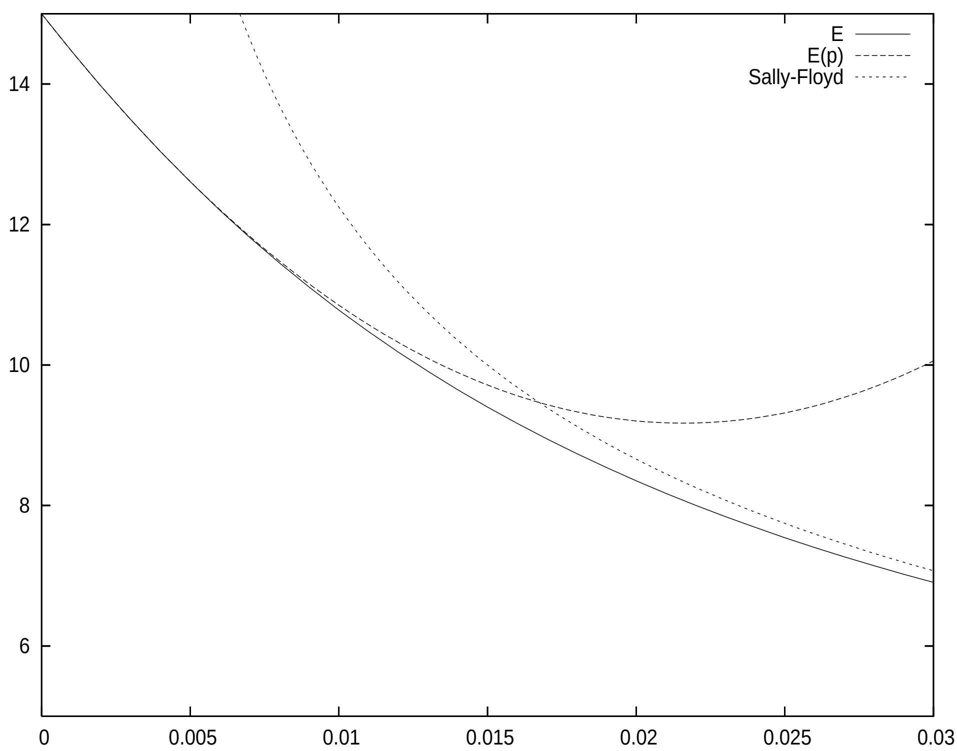

Рис. 3.2: Сравнение оценок размера окна (макс. размер окна 15).

На основании графиков можно сделать вывод, что полученная нами формула 2.11 может быть более успешно использована для оценки математического ожидания размера скользящего окна при небольших вероятностях потери пакета (близких к нулевым). Формула

S. Floyd может быть успешно применена в случае, когда вероятность потери пакета достигает существенных значений, когда в протоколе TCP начинают применяться другие алгоритмы управления размером скользящего окна (а не рассматриваемый нами алгоритм предотвращения насыщения). Тем не менее, необходимо отметить, что при вероятностях потери пакеты, близких к нулевым, формула S. Floyd дает завышенную оценку, не соответствующую действительности. Наша формула 2.11 свободна от данного недостатка.

Заключение

Производительность протокола TCP обладает огромным влиянием на производительность Internet в целом. Попытки расширения семейства Internet приложений выявили недостаточность остаточного принципа, по которому действует TCP. Были предприняты исследования, целью которых являлась адаптация протокола TCP к требованиям приложений реального времени. Тем не менее, несмотря на все попытки, TCP по прежнему продолжает доминировать в Internet и контролировать большинство потоков, пакетов и байтов. В настоящее время TCP является единственным средством, обеспечивающим контроль загрузки и производительности в Internet. Таким образом, любой новый протокол транспортного уровня (или другое средство) должно сохранить механизм борьбы с перегрузками TCP.

Тесная связь между производительностью TCP и механизмом борьбы с перегрузками является причиной значительных усилий, которые были затрачены на разработку модели для аналитического представления пропускной способности TCP.

В нашей работе мы представляем один из альтернативных подходов к моделированию пропускной способности алгоритма борьбы с перегрузками TCP, который часто определяется как алгоритм Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD). Наша модель может также рассматриваться как модель реализации TCP NewReno с вероятностью потери пакета меньше 2.5%.

В процессе исследования были получены следующие результаты:

- были решены уравнения Колмогорова для полумарковского процесса, характеризующего поведение реализации TCP NewReno, описанных в [3], [4];
- было получено аналитическое представление стацонарного распределения окна для модели производительности AIMD;
- были получены приближенные решения второго порядка для вероятностей и оценки ожидаемого размера окна (т.к. точное решение имеет довольно сложный вид);
- полученная оценка стремится к максимальному размеру окна, определяемому в процессе установки TCP соединения, при стремлении вероятности потери сегмента к нулю;
- в полученной оценке учитывается изменчивость RTT.

В работе был проведен анализ и сравнение оценки математического ожидания размера скользящего окна, полученной в нашей работе, с наиболее распространенной оценкой, определяемой по формуле S.Floyd 1. Полученная нами формула лучше подходит для оценки размера окна при малых вероятностях потери пакета, а также учитывает ограничения на максимальный размер окна.

Литература

[1] Alyman E. Bolot J.,Brown P. Collnge D., Performance Modeling in TCP/IP in Wide-Area Network, ISSN 0249-6399 apport de recherche Institus National de Recherche en Informatique et en Automatique

[2] S. Bhandakar, S. Jain, A. L. Narasimha Reddy (Texas A & M University) LTCP: Improving the performance of TCP in Highspeed Networks. ACM SIGCOMM Computer Communication Review, Vol.36, No. 1 (January 2006), pp.39-52.

[3] Bogoiavlenskaia O., Analysis of the Random Flow Generated by the Feedback Transport Protocol in a Data Transfer Network. Automation and Remote Control, Vol. 64, No. 12, 2003, pp. 1882-1889.

[4] Bogoiavlenskaia O., Kojo M., Mutka M., Alanko T. Analytical Markovian Model of TCP Congestion Avoidance Algorithm Performance, Technical Report of the Department of Computer Science of the University of Helsinki, No. C-2002-13.

[5] Jacobson V. Congestion Avoidance and Control, ACM Sigcomm Conference (Stanford CA, Aug. 1988).

[6] Floyd S., Fall F. Promoting the use of end-to-end congestion control in the Internet. IEEE/ACM Transactions on Networking, 7(4) 1999, pp.458-472.

[7] Padhey J., Firoiu V., Towsley D., Kurose J. Modeling TCP Throughput: A Simple Model and its Empirical Validation, IEEE/AMC Transactions on Networking 8(2) 2001, pp.133-145.

[8] Roughan M., Erramilli A., Veitch D., Network Performance for TCP Networks. Part 1: Persistent Sources, Proceedings of Seventeenth International Teletraffic Congress, Salvador de Bahia, Brazil, September 24-28, 2001.

[9] Sikdar B., Kalayanaraman S., Vastola K.S. Analytical model and comparative study of the latency and steady-State throughput of TCP Tahoe, Reno and SACK, GLOBECOM'01, Vol.3 2001 pp.1781-1787.